Kategorie C: Lösungen

Grundlagen

Aufgabe 1

$$s = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \qquad (t \neq 0,\ \text{umstellen nach } a)$$

Lösung:

$$\begin{aligned} s &= \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \quad \Big| \quad \cdot 2 && (1)\\ 2 \cdot s &= a \cdot t^2 \quad \Big| \quad : t^2 && (2)\\ \frac{2 \cdot s}{t^2} &= a && (3)\\ a &= \frac{2 \cdot s}{t^2} \end{aligned}$$

Erklärungen:

Zu Zeile (1): Es ist nicht nötig, die gesuchte Größe nach links zu bringen, man kann sie auch rechts isolieren und dann die Seiten tauschen.

Um Doppelbrüche zu vermeiden, ist es übersichtlicher, mit 2 zu multiplizieren, als die Gleichung durch $1/2$ zu dividieren.

Zu Zeile (2): Hier muss aus dem physikalischen Zusammenhang bekannt sein, dass $t \neq 0$ ist, damit man teilen darf. Dies ist in der Aufgabenstellung vorgegeben.

Zu Zeile (3): Wir tauschen die Seiten.

Aufgabe 2

$$\frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = e \cdot U \qquad\qquad (m \neq 0,\ \text{umstellen nach } v)$$

Lösung:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 &= e \cdot U \quad | \quad \cdot 2 && (4)\\
m \cdot v^2 &= 2 \cdot e \cdot U \quad | \quad : m && (5)\\
v^2 &= \frac{2 \cdot e \cdot U}{m} \quad | \quad \sqrt{} && (6)\\
v &= \pm\sqrt{\frac{2 \cdot e \cdot U}{m}} && (7)
\end{aligned}$$

Erklärungen:

Zu Zeile (4): Um Doppelbrüche zu vermeiden, ist es übersichtlicher, mit 2 zu multiplizieren, als die Gleichung durch $1/2$ zu dividieren.

Zu Zeile (5): Hier muss aus dem physikalischen Zusammenhang bekannt sein, dass $m \neq 0$ ist, damit man teilen darf. Dies ist in der Aufgabenstellung vorgegeben.

Zu Zeile (6): Wir ziehen die Wurzel.

Zu Zeile (7): In Mathematik haben Sie gelernt, dass quadratische Gleichungen zwei Lösungen haben können. Um hier zu entscheiden, ob beide Lösungen sinnvoll sind, bzw. um die sinnvolle auszusuchen, muss man das physikalische Problem interpretieren. Ein negatives Vorzeichen in der Geschwindigkeit bedeutet, dass sich das Objekt in die entgegengesetzte Richtung bewegt. Ob dies zutrifft, kann man nur mit Hilfe der Situation, nicht mit Hilfe der Gleichung entscheiden.

Aufgabe 3

$$\frac{m \cdot v^2}{r} = q \cdot v \cdot B \qquad\qquad (q, v, B \neq 0,\ \text{umstellen nach } r)$$

Lösung:

$$\begin{aligned}
\frac{m \cdot v^2}{r} &= q \cdot v \cdot B \quad | \quad \cdot r && (8)\\
m \cdot v^2 &= q \cdot v \cdot B \cdot r \quad | \quad : (q \cdot v \cdot B) && (9)\\
\frac{m \cdot v^2}{q \cdot v \cdot B} &= r && (10)\\
r &= \frac{m \cdot v}{q \cdot B}
\end{aligned}$$

Erklärungen:

Zu Zeile (8): Es ist nicht nötig, die gesuchte Größe nach links zu bringen, man kann sie auch rechts isolieren und dann die Seiten tauschen.

Steht die gesuchte Größe im Nenner, muss man sie von dort entfernen, in diesem Fall durch einfaches Multiplizieren.

Zu Zeile (9): Hier muss aus dem physikalischen Zusammenhang bekannt sein, dass q, v und $B \neq 0$ sind, damit man teilen darf. Dies ist in der Aufgabenstellung vorgegeben.

Zu Zeile (10): Ein v kann man kürzen. Zum Schluss tauschen wir die Seiten.

Fortgeschrittenen

Aufgabe 1

$$s = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 + v_0 \cdot t \qquad (t \neq 0,\ \text{umstellen nach } a)$$

Lösung:

$$\begin{aligned} s &= \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 + v_0 \cdot t \quad \Big| \; - v_0 \cdot t && (11)\\ s - v_0 \cdot t &= \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 && (12)\\ \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 &= s - v_0 \cdot t \quad | \; \cdot 2 && (13)\\ a \cdot t^2 &= 2 \cdot (s - v_0 \cdot t) \quad \Big| \; : t^2 && (14)\\ a &= \frac{2 \cdot s - 2 \cdot v_0 \cdot t}{t^2} && (15) \end{aligned}$$

Erklärungen:

Zu Zeile (11): Es ist nicht nötig, die gesuchte Größe nach links zu bringen, man kann sie auch rechts isolieren und dann die Seiten tauschen.

Durch die Subtraktion des Terms $v_0 \cdot t$ befinden sich alle Terme mit der gesuchten Größe auf der rechten Seite der Gleichung und alle anderen Terme auf der linken Seite.

Zu Zeile (12): Wir tauschen die Seiten.

Zu Zeile (13): Um Doppelbrüche zu vermeiden, ist es übersichtlicher, mit 2 zu multiplizieren, als die Gleichung durch $1/2$ zu dividieren. Auf der rechten Seite müssen beide Terme mit 2 multipliziert werden. Alternativ kann man die Klammern stehen lassen.

Zu Zeile (14): Hier muss aus dem physikalischen Zusammenhang bekannt sein, dass $t \neq 0$ ist, damit man teilen darf. Dies ist in der Aufgabenstellung vorgegeben. Im Zähler wird die Klammer ausmultipliziert.

Zu Zeile (15): Dies ist das Endergebnis. Da nur einer der Summanden im Zähler ein t enthält, kann man nicht mehr kürzen.

Aufgabe 2

$$F_G = G \cdot \frac{M \cdot m}{r^2} \qquad (F_G \neq 0, r > 0,\ \text{umstellen nach } r)$$

Lösung:

$$
\begin{aligned}
F_G &= G \cdot \frac{M \cdot m}{r^2} \quad \Big| \cdot r^2 && (16)\\
r^2 \cdot F_G &= G \cdot M \cdot m \quad \Big| : F_G && (17)\\
r^2 &= \frac{G \cdot M \cdot m}{F_G} \quad \Big| \sqrt{\ } && (18)\\
r &= \pm\sqrt{\frac{G \cdot M \cdot m}{F_G}} && (19)\\
r &= \sqrt{\frac{G \cdot M \cdot m}{F_G}}
\end{aligned}
$$

Erklärungen:

Zu Zeile (16): Steht die gesuchte Größe im Nenner, muss man sie von dort entfernen, in diesem Fall durch einfaches Multiplizieren.

Zu Zeile (17): Hier muss aus dem physikalischen Zusammenhang bekannt sein, dass $F_G \neq 0$ ist, damit man teilen darf. Dies ist in der Aufgabenstellung vorgegeben.

Zu Zeile (18): Wir ziehen die Wurzel.

Zu Zeile (19): In Mathematik haben Sie gelernt, dass quadratische Gleichungen zwei Lösungen haben können. Um hier zu entscheiden, ob beide Lösungen sinnvoll sind, bzw. um die sinnvolle auszusuchen, muss man das physikalische Problem interpretieren. In dieser Gleichung steht das r für den Abstand zwischen zwei Massen, kann also nicht negativ sein. Dies ist in der Aufgabe vorgegeben. Daher ist die negative Wurzel hier nicht physikalisch sinnvoll und kann weggelassen werden.

Aufgabe 3

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m}{D}} \qquad (T \neq 0,\ \text{umstellen nach } D)$$

Lösung:

$$\begin{aligned}
T &= 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m}{D}} \quad \Big| \quad (\ )^2 && (20)\\
T^2 &= \left(2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m}{D}}\right)^2 && (21)\\
T^2 &= 4 \cdot \pi^2 \cdot \left(\sqrt{\frac{m}{D}}\right)^2 && (22)\\
T^2 &= 4 \cdot \pi^2 \cdot \frac{m}{D} \quad \Big| \quad \cdot D && (23)\\
D \cdot T^2 &= 4 \cdot \pi^2 \cdot m \quad \Big| \quad : T^2 && (24)\\
D &= \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot m}{T^2} \quad \Big| \quad : T^2
\end{aligned}$$

Erklärungen:

Zu Zeile (20): Steht die gesuchte Größe unter der Wurzel, muss die Wurzel aufgelöst werden. Dies erreichen wir, indem wir die Gleichung quadrieren.

Zu Zeile (21): Ein Produkt wird quadriert, indem man jeden Faktor quadriert.

Zu Zeile (22): Durch das Quadrieren verschwindet die Wurzel.

Zu Zeile (23): Steht die gesuchte Größe im Nenner, muss man sie von dort entfernen, in diesem Fall durch einfaches Multiplizieren.

Zu Zeile (25): Hier muss aus dem physikalischen Zusammenhang bekannt sein, dass $T \neq 0$ ist, damit man teilen darf. Dies ist in der Aufgabenstellung vorgegeben.

Experten

Aufgabe 1

$$m \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot D \cdot s^2 + \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \qquad (v^2 \neq 2gh,\ \text{umstellen nach } m)$$

Lösung:

$$\begin{aligned}
m \cdot g \cdot h &= \frac{1}{2} \cdot D \cdot s^2 + \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \quad \Big| \quad -\frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 && (25)\\
m \cdot g \cdot h - \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 &= \frac{1}{2} \cdot D \cdot s^2 && (26)\\
m \cdot \left(g \cdot h - \frac{1}{2} \cdot v^2\right) &= \frac{1}{2} \cdot D \cdot s^2 \quad \Big| : \left(g \cdot h - \frac{1}{2} \cdot v^2\right) && (27)\\
m &= \frac{\frac{1}{2} \cdot D \cdot s^2}{g \cdot h - \frac{1}{2} \cdot v^2} && (28)\\
m &= \frac{D \cdot s^2}{2 \cdot g \cdot h - v^2}
\end{aligned}$$

Erklärungen:

Zu Zeile (25): Durch die Subtraktion des Terms $\frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$ befinden sich alle Terme mit der gesuchten Größe auf der linken Seite der Gleichung und alle anderen Terme auf der rechten Seite.

Zu Zeile (26): Alle Terme mit m stehen nun links, die Gleichung ist linear (es tritt kein m^2 etc. auf). Daher klammern wir m aus, um anschließend durch den Rest dividieren zu können.

Zu Zeile (27): Wir dividieren durch den Koeffizienten von m.

Zu Zeile (28): Zur Vereinfachung wird der Bruch noch mit 2 erweitert. So verschwinden die Doppelbrüche. Achtung: Im Zähler und Nenner muss jeder Term mit 2 multipliziert werden, also auch $g \cdot h$.

Aufgabe 2

$$\frac{1}{2} \cdot m \cdot v_0^2 + m \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \qquad (m \neq 0,\ \text{umstellen nach } v_0)$$

Lösung:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \cdot m \cdot v_0^2 + m \cdot g \cdot h &= \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \quad \Big| \; - m \cdot g \cdot h && (29)\\
\frac{1}{2} \cdot m \cdot v_0^2 &= \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 - m \cdot g \cdot h \quad \Big| \; \cdot 2 && (30)\\
m \cdot v_0^2 &= m \cdot v^2 - 2 \cdot m \cdot g \cdot h \quad \Big| \; : m && (31)\\
v_0^2 &= \frac{m \cdot v^2 - 2 \cdot m \cdot g \cdot h}{m} && (32)\\
v_0^2 &= \frac{m \cdot (v^2 - 2 \cdot g \cdot h)}{m} && (33)\\
v_0^2 &= v^2 - 2 \cdot g \cdot h \quad \Big| \; \sqrt{} && (34)\\
v_0 &= \pm\sqrt{v^2 - 2 \cdot g \cdot h} && (35)
\end{aligned}$$

Erklärungen:

Zu Zeile (29): Durch die Subtraktion des Terms $m \cdot g \cdot h$ befinden sich alle Terme mit der gesuchten Größe auf der linken Seite der Gleichung und alle anderen Terme auf der rechten Seite.

Zu Zeile (30): Um Doppelbrüche zu vermeiden, ist es übersichtlicher, mit 2 zu multiplizieren, als die Gleichung durch $1/2$ zu dividieren.

Zu Zeile (31): Hier haben es Physiker einfacher als Mathematiker: Sie wissen an dieser Stelle, dass m die Masse des untersuchten Objekts ist, und dürfen daher gefahrlos durch m teilen, ohne sich zu sorgen, ob $m = 0$ sein kann.

Zu Zeile (32): Wir klammern m aus, um kürzen zu können.

Zu Zeile (33): Wir kürzen.

Zu Zeile (34): Hier muss man bedenken, dass man aus Differenzen und Summen genauso wenig Wurzeln ziehen darf, wie man kürzen kann.

Zu Zeile (35): In Mathematik haben Sie gelernt, dass quadratische Gleichungen zwei Lösungen haben können. Um hier zu entscheiden, ob beide Lösungen sinnvoll sind, bzw. um die sinnvolle auszusuchen, muss man das physikalische Problem interpretieren. Ein negatives Vorzeichen in der Geschwindigkeit bedeutet, dass sich das Objekt in die entgegengesetzte Richtung bewegt. Ob dies zutrifft, kann man nur mit Hilfe der Situation, nicht mit Hilfe der Gleichung entscheiden.

Aufgabe 3

$$0 = -\frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 + v_0 \cdot \sin(\alpha) \cdot t + h \qquad\qquad (g \neq 0,\ \text{umstellen nach } t)$$

Lösung:

$$\begin{aligned}
0 &= -\frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 + v_0 \cdot \sin(\alpha) \cdot t + h \quad | \quad \cdot(-2) && (36)\\
0 &= g \cdot t^2 - 2 \cdot v_0 \cdot \sin(\alpha) \cdot t - 2h && (37)\\
0 &= g \cdot t^2 + (-2 \cdot v_0 \cdot \sin(\alpha)) \cdot t + (-2h) && (38)\\
t &= \frac{2 \cdot v_0 \cdot \sin(\alpha) \pm \sqrt{4 \cdot v_0^2 \cdot \sin^2(\alpha) - 4 \cdot g \cdot (-2h)}}{2g} && (39)\\
&= \frac{2 \cdot v_0 \cdot \sin\alpha \pm \sqrt{4 \cdot v_0^2 \cdot \sin^2(\alpha) + 8 \cdot g \cdot h}}{2g} && (40)\\
&= \frac{2 \cdot v_0 \cdot \sin\alpha \pm \sqrt{4 \cdot \left(v_0^2 \cdot \sin^2(\alpha) + 2 \cdot g \cdot h\right)}}{2g} && (41)\\
&= \frac{2 \cdot v_0 \cdot \sin\alpha \pm 2 \cdot \sqrt{v_0^2 \cdot \sin^2(\alpha) + 2 \cdot g \cdot h}}{2g} && (42)\\
&= \frac{v_0 \cdot \sin\alpha \pm \sqrt{v_0^2 \cdot \sin^2(\alpha) + 2 \cdot g \cdot h}}{g} && (43)
\end{aligned}$$

Zu Zeile (37): Unsere Gleichung ist eine quadratische Gleichung in t. Hierfür gibt es verschiedene Lösungsmethoden. Man kann die Koeffizienten der Gleichung (die Terme vor t^2, vor t und den konstanten Term) sofort in die Mitternachtsformel (abc-Formel) einsetzen, oder man kann durch den Koeffizienten von t^2 teilen und die pq-Formel benutzen. Wir benutzen die Mitternachtsformel, da diese immer funktioniert. Um sich später Vereinfachungsverfahren wie teilweises Wurzelziehen zu ersparen, ist es aber in jedem Fall eine gute Idee, keine Brüche vor dem t^2 zu haben. Daher multiplizieren wir im ersten Schritt mit (-2), um Doppelbrüche zu vermeiden.

Zu Zeile (38): Um zu verdeutlichen, welches die Koeffizienten sind, die wir in die ABC-Formel einsetzen müssen, haben wir Klammern gesetzt. Dadurch wird der häufig auftretende Fehler vermieden, dass das t aus Versehen in den Koeffizienten b gerät.

Zu Zeile (39): Wir benutzen nun die Mitternachtsformel.

Auch hier haben es Physiker einfacher als Mathematiker: Sie wissen an dieser Stelle, dass g die Erdbeschleunigung ist, und dürfen daher gefahrlos durch g teilen, ohne sich zu sorgen, ob $g = 0$ sein kann.

Bitte nicht vergessen: Eine quadratische Gleichung hat bis zu zwei Lösungen.

Zu Zeile (40): Wir haben nun nach t aufgelöst. Man sieht aber, dass sich noch ein gemeinsamer Faktor in allen Summanden befindet. Um das Ergebnis kompakter schreiben zu können, machen wir daher noch einige Umformungen.

Zunächst klammern wir unter der Wurzel 4 aus, denn teilweises Wurzelziehen funktioniert nur bei Produkten.

Zu Zeile (41): Wir ziehen die Wurzel aus 4. Dabei benutzen wir das Potenzgesetz $(ab)^{1/2} = a^{1/2} \cdot b^{1/2}$.

Zu Zeile (42): Wir klammern im Zähler 2 aus und kürzen.

Zu Zeile (43) Das Ergebnis ist nun soweit vereinfacht wie möglich. Hier erkennt man nun, dass es zumindest bei $h \geq 0$ (g ist sowieso positiv) zwei Lösungen gibt. Die Lösung mit dem Minus ist dabei negativ, physikalisch bedeutet dies eine Zeit vor Beginn der Zeitmessung.